



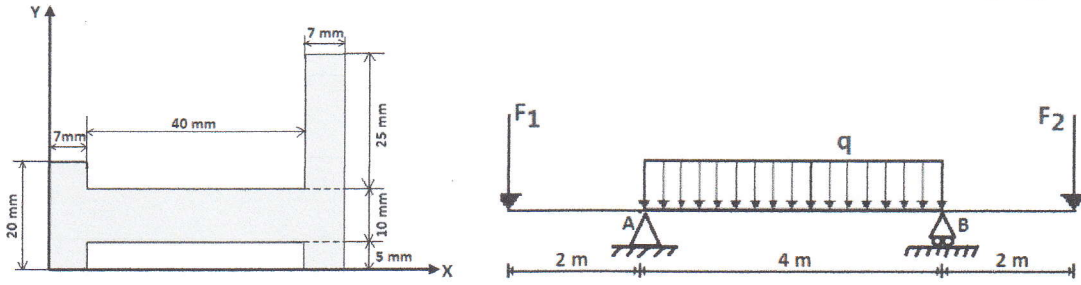
امتحان السداسي الأول في مقياس مقاومة المواد

في 2023/02/13
المدة ساعتان

سنة ثانية : جذع مشترك

التمرين الأول:

لدينا عارضة فولاذية مسندة في A على مسند مزدوج وفي B على مسند بسيط. تتعرض هذه العارضة لقوة $F_1 = 21 \text{ kN}$ على طرفها الأيسر و $F_2 = 22 \text{ kN}$ على طرفها الأيمن و قوى موزعة بانتظام $q = 27 \text{ kN/m}$ على الجزء AB، كما موضح في الشكل أدناه:

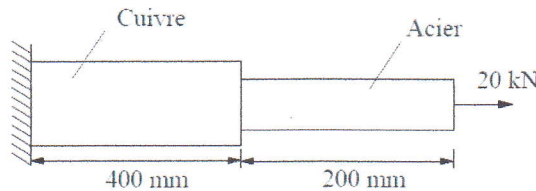


المطلوب:

- I. أحسب ردود الأفعال في المسندين A و B.
- II. المقطع العرضي لهذه العارضة هو شكل مركب، أبعاده موضحة في الشكل:
 1. أوجد احداثيات مركز ثقل المقطع،
 2. أحسب العزوم التربيعية I_{X_G} و I_{Y_G} والعزم التربيعي المركزي $I_{X_G Y_G}$ ،
 3. أحسب العزوم التربيعية الرئيسية $I_{\max}$ و $I_{\min}$ ،
 4. أوجد موضع العزوم التربيعية الرئيسية و أرسمها.

التمرين الثاني:

يتكون هيكل بطول 600 mm من قضيب فولاذي (barre en acier) طوله 0.2 m وقطره 30 mm ، ملحومًا محوريًا بقضيب نحاسي آخر بطول 400 mm.



المطلوب:

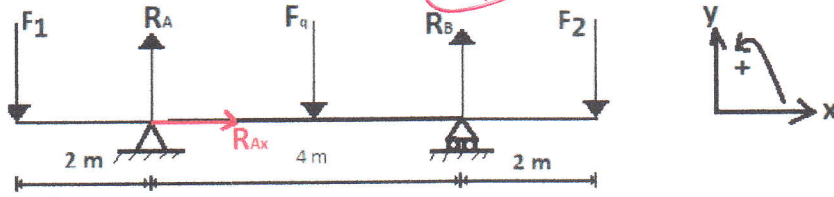
1. حدد قطر القضيب النحاسي (barre en cuivre) الذي يسمح بالحصول على استطالات متساوية في القضيبين، تحت تأثير قوة شد محورية مقدارها 20 kN، مع العلم أن $E_{\text{acier}} = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ ، $E_{\text{cuivre}} = 1.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$.
2. حدد في هذه الحالة الاجهادات الناعمية في كل مادة.
3. أرسم منحنيات الجهود و الاجهادات الناعمية على طول الهيكل.

بالتوفيق

تصحيح امتحان السداسي الأول في مقياس مقاومة المواد

حل التمرين الأول: 14 نقطة

I. إيجاد ردود أفعال المساند:



$$\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0 \quad (1)$$

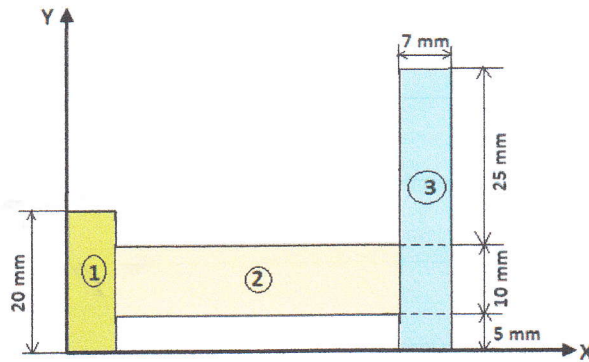
$$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow R_A - F_1 - F_q - F_2 + R_B = 0 \Leftrightarrow R_A + R_B = F_1 + F_q + F_2 \quad (2)$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow -2F_1 + 4R_B - 6F_2 + 2F_1 = 0 \Leftrightarrow R_B = (2F_q + 6F_2 - 2F_1) / 4 \quad \text{où } F_q = q \cdot 4 = 27 \times 4 = 108 \text{ kN}$$

$$\Leftrightarrow R_B = (2 \times 108 + 6 \cdot 22 - 2 \times 21) / 4 \Leftrightarrow R_B = 76.5 \text{ kN}$$

$$(2) \Leftrightarrow R_A + R_B = 151 \Leftrightarrow R_A = 151 - 76.5 \Leftrightarrow R_A = 74.5 \text{ kN}$$

1.II. إيجاد احداثيات مركز الثقل:



$$S_x = S_{x1} + S_{x2} + S_{x3} = \int_{A_1} y dA_1 + \int_{A_2} y dA_2 + \int_{A_3} y dA_3$$

$$S_x = \int_0^{20} y \cdot 7 \cdot dy + \int_5^{15} y \cdot 40 \cdot dy + \int_0^{40} y \cdot 7 \cdot dy \quad S_x = 7 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{20} + 40 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_5^{15} + 7 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{40}$$

$$\Rightarrow S_x = 1400 + 4000 + 5600 \Rightarrow S_x = 11000 \text{ mm}^3$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = (7 \times 20) + (40 \times 10) + (7 \times 40) = 140 + 400 + 280 \Rightarrow S = 820 \text{ mm}^2$$

$$y_G = \frac{S_x}{S} = \frac{11000}{820} \Leftrightarrow y_G = 13.41 \text{ mm}$$

$$S_y = S_{y1} + S_{y2} + S_{y3} = \int_{A_1} x dA_1 + \int_{A_2} x dA_2 + \int_{A_3} x dA_3 = \int_0^7 x \cdot 20 \cdot dx + \int_7^{47} x \cdot 10 \cdot dx + \int_{47}^{54} x \cdot 40 \cdot dx$$

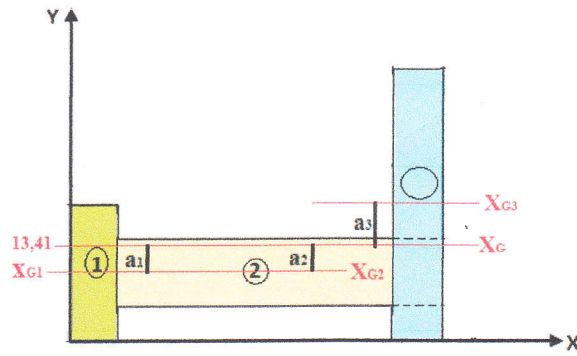
$$S_y = 20 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^7 + 10 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_7^{47} + 40 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{47}^{54} = 480 + 10800 + 14140 \Rightarrow S_y = 25420 \text{ mm}^3$$

$$x_G = \frac{S_y}{S} = \frac{25420}{820} \Rightarrow x_G = 31 \text{ mm}$$

اذن احداثيات مركز الثقل هي: (31, 13.41)

2.II. أحسب العزوم التربيعية I_{x_G} و I_{y_G} والعزم التربيعي المركزي $I_{x_G y_G}$:

أ. حساب العزم التربيعي I_{X_G} : 03,25



$$I_{X_G} = \sum I_{X_{Gi}} + \sum a_i^2 \cdot S_i = (I_{X_{G1}} + I_{X_{G2}} + I_{X_{G3}}) + (a_1^2 \cdot S_1 + a_2^2 \cdot S_2 + a_3^2 \cdot S_3)$$

$$I_{X_{G1}} = \int_{A_1} y^2 dA_1 = 7 \int_{-10}^{10} y^2 dy = 7 \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{-10}^{10} \Rightarrow I_{X_{G1}} = 4666,67 \text{ mm}^4$$

$$I_{X_{G2}} = \int_{A_2} y^2 dA_2 = 40 \int_{-5}^5 y^2 \cdot dy = 40 \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{-5}^5 \Rightarrow I_{X_{G2}} = 3333,33 \text{ mm}^4$$

$$I_{X_{G3}} = \int_{A_3} y^2 dA_3 = 7 \int_{-20}^{20} y^2 \cdot dy = 7 \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{-20}^{20} \Rightarrow I_{X_{G3}} = 37333,33 \text{ mm}^4$$

$$S_1 = 7 \times 20 = \Rightarrow S_1 = 140 \text{ mm}^2$$

$$a_1 = Y_{G1} - Y_G = 10 - 13,41 \Rightarrow a_1 = -3,41 \text{ mm}$$

$$S_2 = 10 \times 40 \Rightarrow S_2 = 400 \text{ mm}^2$$

$$a_2 = Y_{G2} - Y_G = 10 - 13,41 \Rightarrow a_2 = -3,41 \text{ mm}$$

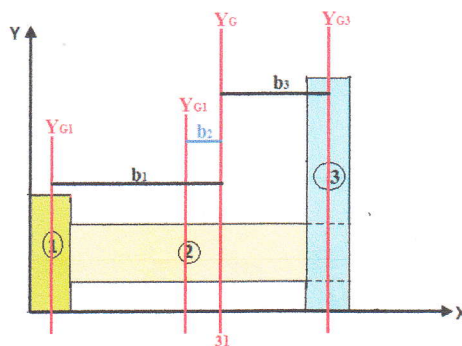
$$S_3 = 7 \times 40 \Rightarrow S_3 = 280 \text{ mm}^2$$

$$a_3 = Y_{G3} - Y_G = 20 - 13,41 \Rightarrow a_3 = 6,59 \text{ mm}$$

$$I_{X_G} = (4666,67 + 3333,33 + 37333,33) + [(-3,41)^2 \times 140 + (-3,41)^2 \times 400 + (6,59)^2 \times 280]$$

$$I_{X_G} = 63772,37 \text{ mm}^4$$

ب. أ. حساب العزم التربيعي I_{Y_G} :



$$I_{Y_G} = \sum I_{Y_{Gi}} + b_i^2 \cdot S_i = (I_{Y_{G1}} + I_{Y_{G2}} + I_{Y_{G3}}) + (b_1^2 \cdot S_1 + b_2^2 \cdot S_2 + b_3^2 \cdot S_3)$$

$$I_{Y_{G1}} = \int_{A_1} x^2 dA_1 = 20 \int_{-3,5}^{3,5} x^2 dx = 20 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-3,5}^{3,5} \Rightarrow I_{Y_{G1}} = 571,67 \text{ mm}^4$$

$$I_{Y_{G2}} = \int_{A_2} x^2 dA_2 = 10 \int_{-20}^{20} x^2 dx = 10 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-20}^{20} \Rightarrow I_{Y_{G2}} = 53333,33 \text{ mm}^4 \quad 0,25 \times 2$$

$$I_{Y_{G3}} = \int_{A_3} x^2 dA_3 = 40 \int_{-3,5}^{3,5} x^2 dx = 40 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-3,5}^{3,5} \Rightarrow I_{Y_{G2}} = 1143,33 \text{ mm}^4 \quad 0,25 \times 2$$

$$b_1 = X_{G1} - X_G = 3,5 - 31 \Rightarrow b_1 = -27,5 \text{ mm} \text{ et } S_1 = 140 \text{ mm}^2$$

$$b_2 = X_{G2} - X_G = 27 - 31 \Rightarrow b_2 = -4 \text{ mm} \text{ et } S_2 = 400 \text{ mm}^2$$

$$b_3 = X_{G3} - X_G = 50,5 - 31 \Rightarrow b_3 = 19,5 \text{ mm} \text{ et } S_3 = 280 \text{ mm}^2$$

$$I_{Y_G} = (571,67 + 53333,33 + 1143,33) + [(-27,5)^2 \times 140 + (-4)^2 \times 400 + (-19,5)^2 \times 280]$$

$$I_{Y_G} = 273\,793,33 \text{ mm}^4 \quad 0,25$$

ج. إيجاد عزم العطالة المركزي للمقطع : $I_{X_G Y_G}$

$$I_{X_G Y_G} = \sum I_{X_{Gi} Y_{Gi}} + a_i \cdot b_i \cdot S_i = (I_{X_{G1} Y_{G1}} + I_{X_{G2} Y_{G2}} + I_{X_{G3} Y_{G3}}) + (a_1 \cdot b_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot b_2 \cdot S_2 + a_3 \cdot b_3 \cdot S_3)$$

$$I_{X_{G1} Y_{G1}} = \int_{A_1} y \cdot z \cdot dA_1 = \int_{-10}^{10} \int_{-3,5}^{3,5} x \cdot y \cdot dx \cdot dy = \int_{-3,5}^{3,5} x dx \int_{-10}^{10} y dy = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-3,5}^{3,5} \times \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{-10}^{10} = 0 \quad 0,25$$

$$I_{X_{G2} Y_{G2}} = \int_{A_2} xy dA_2 = \int_{-5}^5 \int_{-20}^{20} xy dx dy = \int_{-20}^{20} x dx \int_{-5}^5 y dy = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-20}^{20} \cdot \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{-5}^5 = \left[\frac{20^2}{2} - \frac{(-20)^2}{2} \right] \cdot \left[\frac{5^2}{2} - \frac{(-5)^2}{2} \right] = 0 \quad 0,25$$

$$I_{X_{G3} Y_{G3}} = \int_{A_3} xy dA_3 = \int_{-20}^{20} \int_{-3,5}^{3,5} xy dx dy = \int_{-3,5}^{3,5} x dx \int_{-20}^{20} y dy = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-3,5}^{3,5} \cdot \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{-20}^{20} = \left[\frac{3,5^2}{2} - \frac{(-3,5)^2}{2} \right] \cdot \left[\frac{20^2}{2} - \frac{(-20)^2}{2} \right] = 0 \quad 0,25$$

$$I_{X_G Y_G} = (0 + 0 + 0) + [(-27,5) \times (-3,41) \times 140 + (-4) \times (-3,41) \times 400 + 19,5 \times 6,95 \times 280]$$

$$I_{X_G Y_G} = 54565,9 \text{ mm}^4 \quad 0,25$$

3.II. حساب العزوم التربيعية الرئيسية ($I_{\min}$ و $I_{\max}$) : $0,15$

$$I_{\max} = \frac{I_{X_G} + I_{Y_G}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{X_G} - I_{Y_G}}{2} \right)^2 + I_{X_G Y_G}^2} \quad 0,15$$

$$I_{\max} = \frac{63772,37 + 273793,33}{2} + \sqrt{\left(\frac{63772,37 - 273793,33}{2} \right)^2 + 54565,9^2}$$

$$I_{\max} = 287\,124,04 \text{ mm}^4 \quad 0,25$$

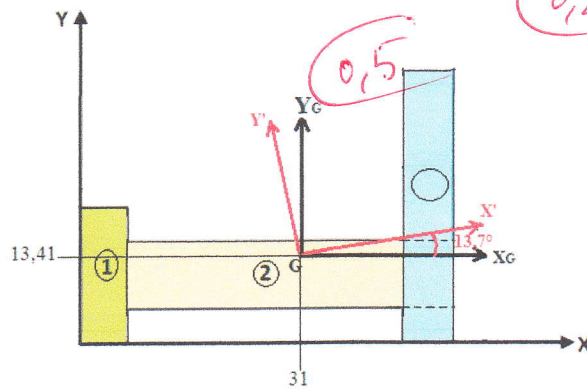
$$I_{\min} = \frac{I_{X_G} + I_{Y_G}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{X_G} - I_{Y_G}}{2} \right)^2 + I_{X_G Y_G}^2} \quad 0,15$$

$$I_{\min} = \frac{63772,37 + 273793,33}{2} - \sqrt{\left(\frac{63772,37 - 273793,33}{2} \right)^2 + 54565,9^2}$$

$$I_{\min} = 50\,441,65 \text{ cm}^4 \quad 0,25$$

4.II. إيجاد موضع العزوم التربيعية الرئيسية و رسمها:

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{x_G y_G}}{I_{y_G} - I_{x_G}} = \frac{2 \times 54565,9}{273\,793,33 - 63\,772,37} = 0,52 \Rightarrow 2\theta = 27,46^\circ \Rightarrow \theta = 13,7^\circ$$

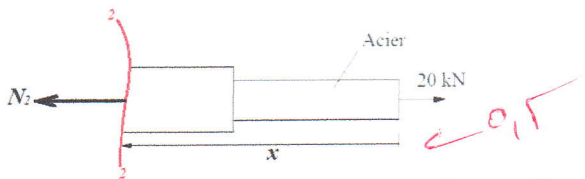


حل التمرين الثاني: **مادة**

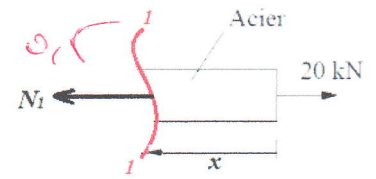
1. تحديد قطر القضيب النحاسي:

المقطع 1-1: $0 \leq x \leq 200 \text{ mm}$

المقطع 2-2: $200 \text{ mm} \leq x \leq 400 \text{ mm}$



$$\sum \vec{F}_{ix} = \vec{0} \Leftrightarrow N_2 = 20 \text{ kN}$$



$$\sum \vec{F}_{ix} = \vec{0} \Leftrightarrow N_1 = 20 \text{ kN}$$

$$\sigma = \frac{N}{S} \text{ et } \sigma = \varepsilon \cdot E \Rightarrow \frac{N}{S} = \varepsilon \cdot E \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{N}{S \cdot E} \text{ et on a aussi } \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \frac{\Delta L}{L} = \frac{N}{S \cdot E} \Leftrightarrow \Delta L = \frac{L \cdot N}{S \cdot E}$$

$$\Delta L_A = \frac{L_A \cdot N_1}{S_A \cdot E_A} = \frac{L_A \cdot N_1 \cdot 4}{\pi \cdot d_A^2 \cdot E_A} \text{ et } \Delta L_c = \frac{L_c \cdot N_2 \cdot 4}{\pi \cdot d_c^2 \cdot E_c} \Rightarrow$$

$$\Delta L_A = \Delta L_c \Leftrightarrow \frac{L_A \cdot N_1 \cdot 4}{\pi \cdot d_A^2 \cdot E_A} = \frac{L_c \cdot N_2 \cdot 4}{\pi \cdot d_c^2 \cdot E_c} \Leftrightarrow \frac{L_A}{d_A^2 \cdot E_A} = \frac{L_c}{d_c^2 \cdot E_c} \Rightarrow d_c^2 = \frac{L_c \cdot d_A^2 \cdot E_A}{E_c \cdot L_A} = \frac{400 \cdot 30^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 200}$$

$$d_c = 57,21 \text{ mm}$$

2. تحديد الاجهادات الناعمية في كل مادة

$$\sigma_A = \frac{N_1}{S_A} = \frac{N_1 \cdot 4}{\pi \cdot d_A^2} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 4}{\pi \cdot 30^2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma_A = 28,29 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_c = \frac{N_2}{S_c} = \frac{N_2 \cdot 4}{\pi \cdot d_c^2} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 4}{\pi \cdot 57,21^2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma_c = 7,78 \text{ N/mm}^2$$

3. رسم منحنيات الجهود و الاجهادات الناعمية:

